

Cours 3

Agencements de résistances

EE 105 – Sciences et technologies de l'électricité
Printemps 2025

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

Aujourd'hui

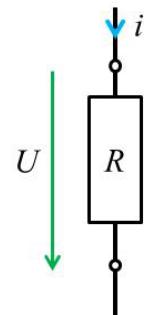
- Résistances en série, en parallèle,
- Combinés série-parallèle
- Arrangement triangle-étoile

La résistivité ρ est une propriété du matériau, en Ωm .

$$U = Ri; R \geq 0$$

La résistance (en Ω) est l'opposition faite au passage du courant électrique i dans un circuit fermé soumis à une tension continue U .

Loi d'Ohm: La tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle au courant qui la traverse.



Le déplacement d'une charge Q d'un point A à un point B sous l'influence d'un champ électrique implique un travail W_{AB} , en J.

La puissance P d'un élément sous tension U_{AB} traversé par un courant i est l'énergie délivrée par unité de temps, en W

$$W_{AB} = QU_{AB}$$

Selon la convention moteur des sens, une puissance positive (négative) est consommée (fournie) par l'élément

$$P = U_{AB}i$$

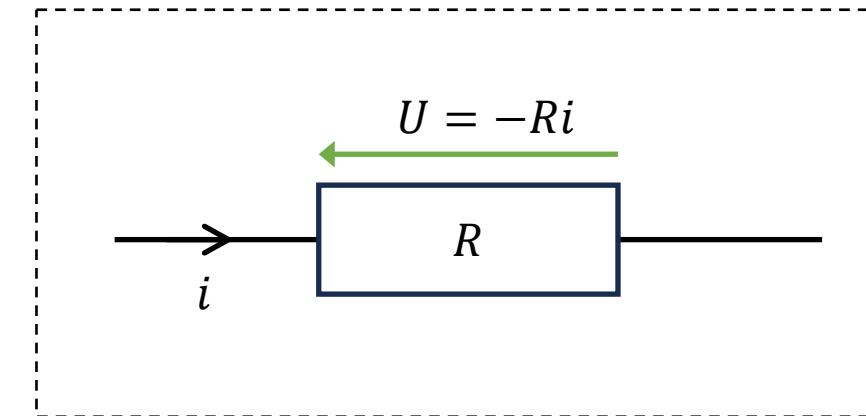
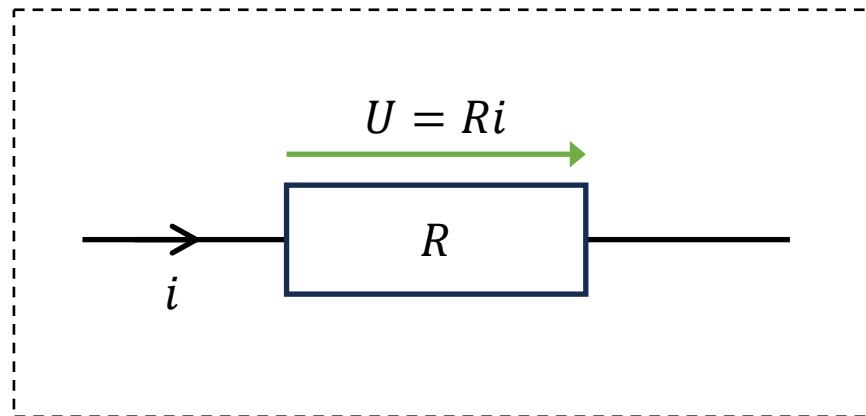
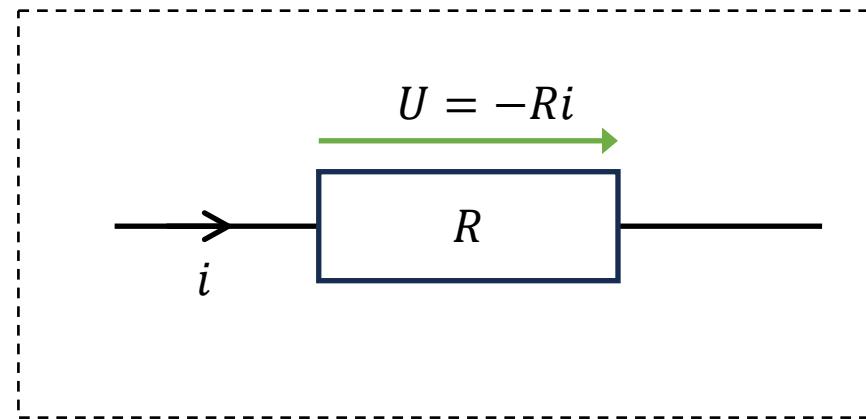
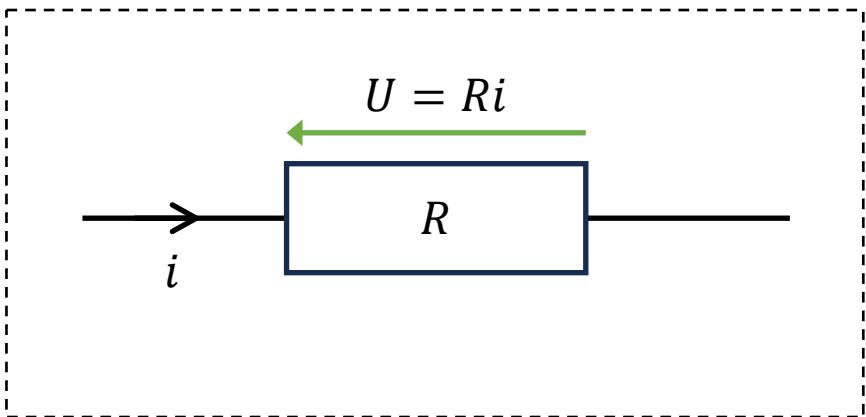
Loi des nœuds de Kirchhoff: somme algébrique des courants sur un nœud est nulle.

$$\sum_{k=1}^N i_k = 0$$

Loi des mailles de Kirchhoff: somme algébrique des tensions sur une maille est nulle.

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0$$

Rappel – quelles sont les bonnes réponses ?



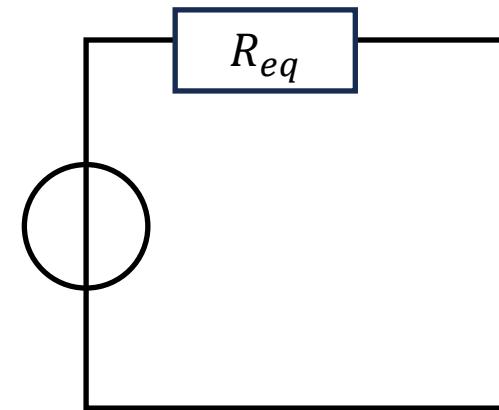
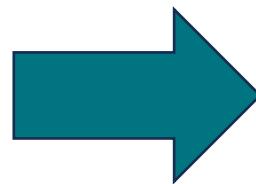
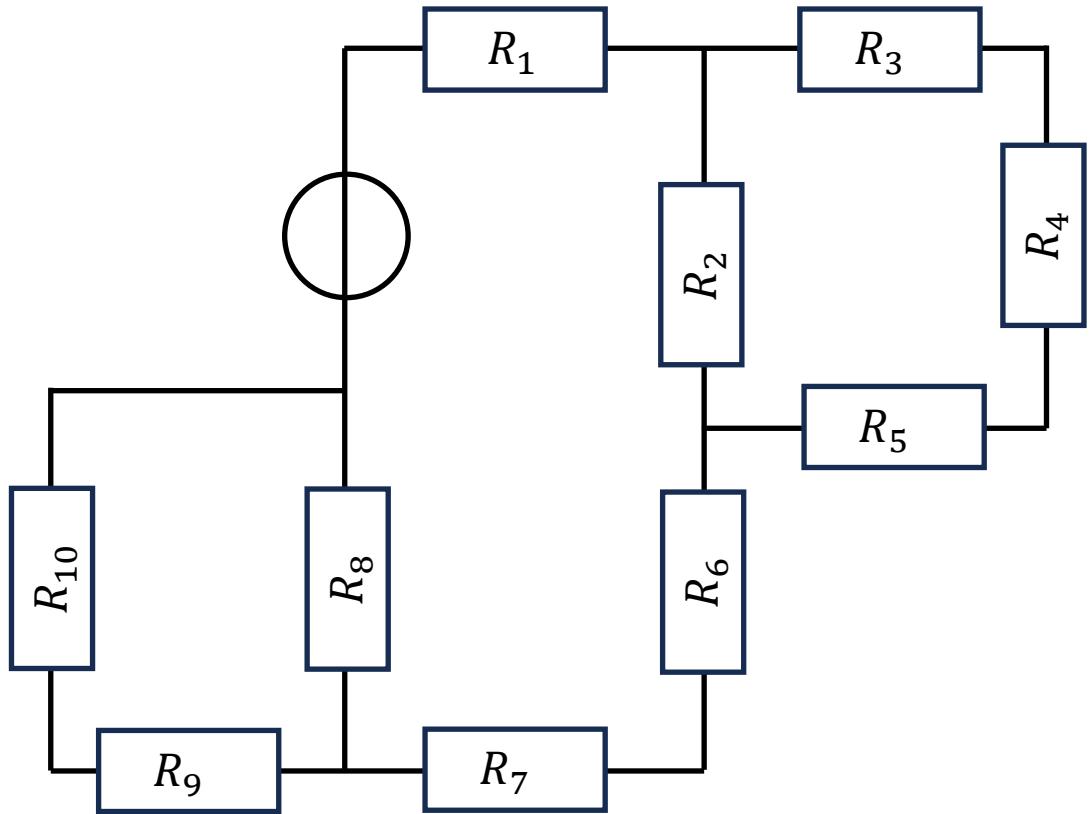
Agencements série et parallèle

Parfois (et même souvent) la réorganisation du schéma est très utile.

- Cela aide à avoir une meilleure compréhension de la connectivité du circuit.
- Chacun peut avoir sa façon de ‘voir’ un circuit et de mieux identifier comment les éléments sont connectés (série ou parallèle).

Différentes procédures peuvent être utilisées pour obtenir un schéma équivalent de complexité réduite.

- Parfois il suffit tout simplement de le redessiner à notre façon. Par exemple en essayant d’aplanir le schéma si les connections sont croisées.
- Ensuite, la procédure la plus élémentaire consiste à remplacer les éléments de même type (toutes des résistances, ou des inductances etc..) connectés en série ou parallèle par des dipôles équivalents.



Circuit equivalent:

- Plus facile à analyser !

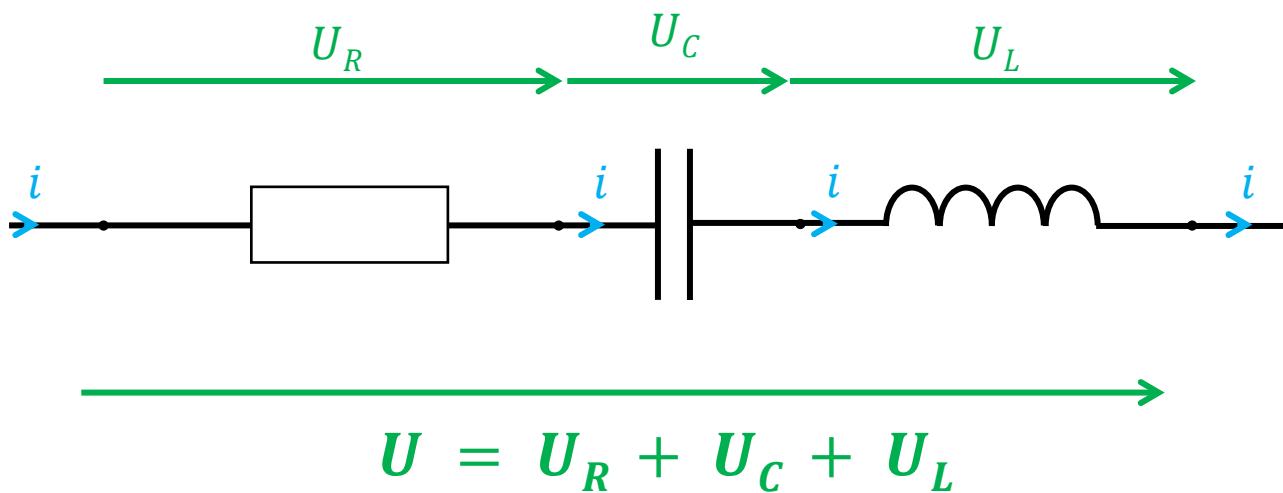
Possible mais:

- C'est long
- Ca peut etre compliqué

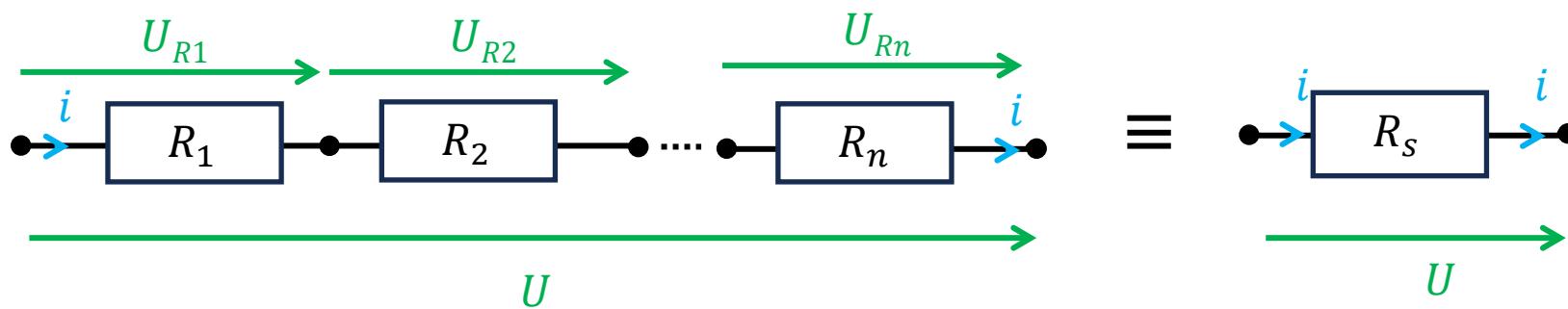


Conformément aux lois de Kirchhoff, les éléments connectés en série:

- sont parcourus par le même courant (1^{ere} loi).
- De plus la tension aux bornes du circuit série est égale à la somme des tensions relatives à chaque élément (2^{eme} loi).



Un circuit composé de plusieurs résistances connectées en série peut se réduire à une unique résistance équivalente R_S

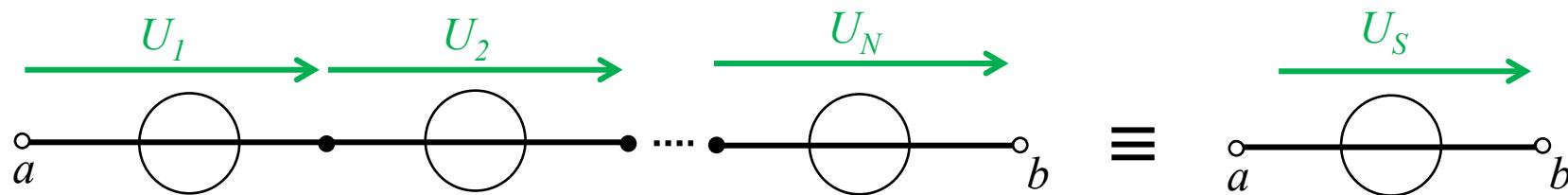


La résistance R_S équivalente à une série de résistances est égale à la somme des résistances

Dans le cas général de R_S résistances en série :

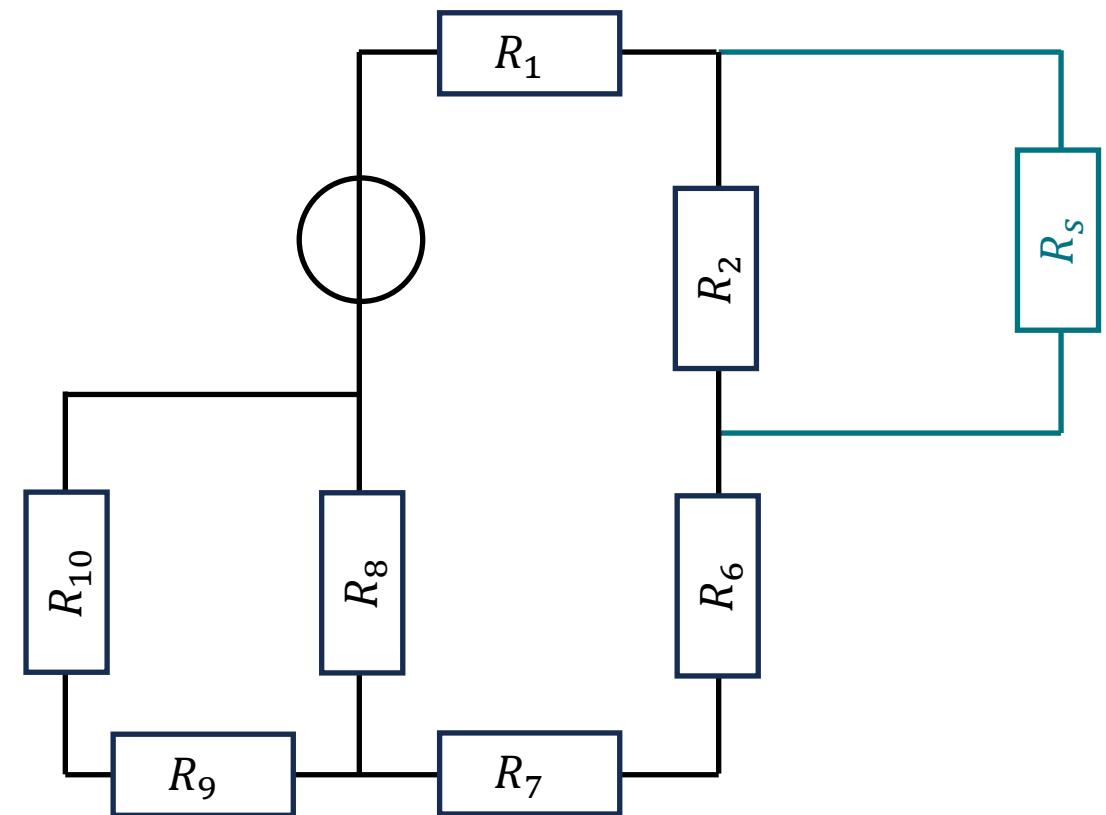
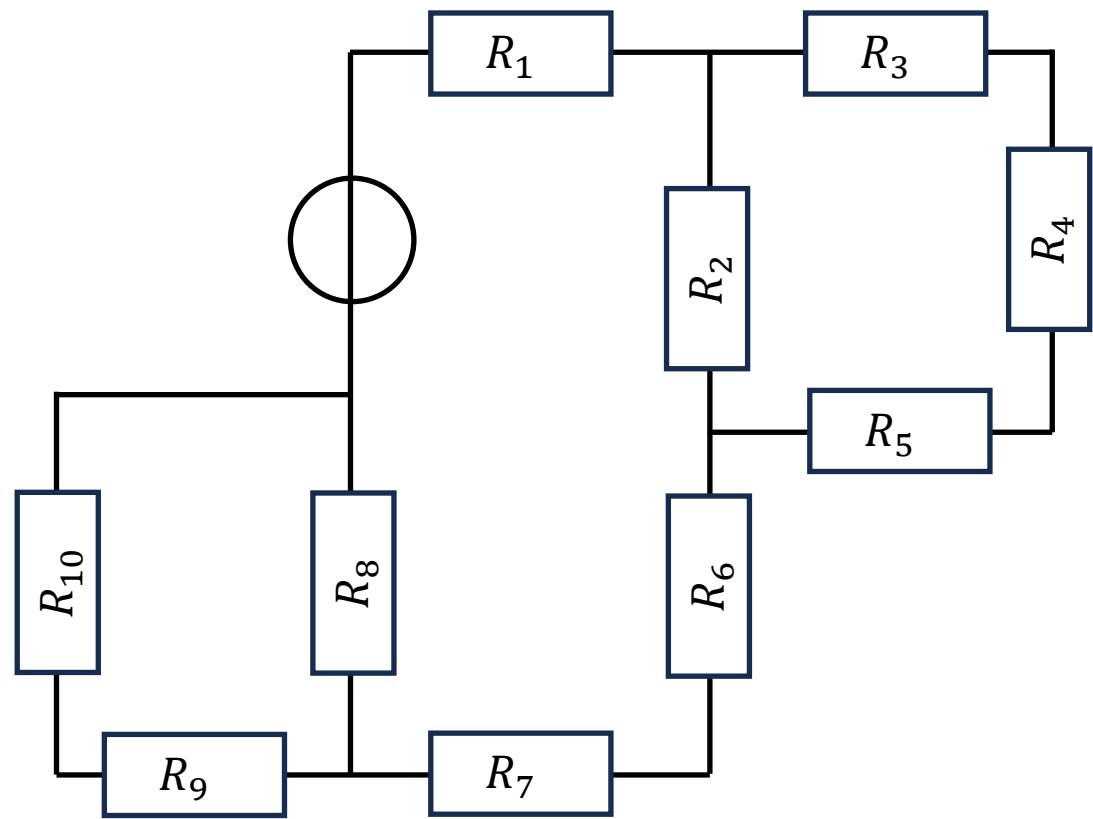
$$R_S = \sum_{k=1}^N R_k$$

Un circuit composé de plusieurs sources de tension idéales en série est équivalent à une source de tension unique égale à la *somme algébrique* des tensions individuelles

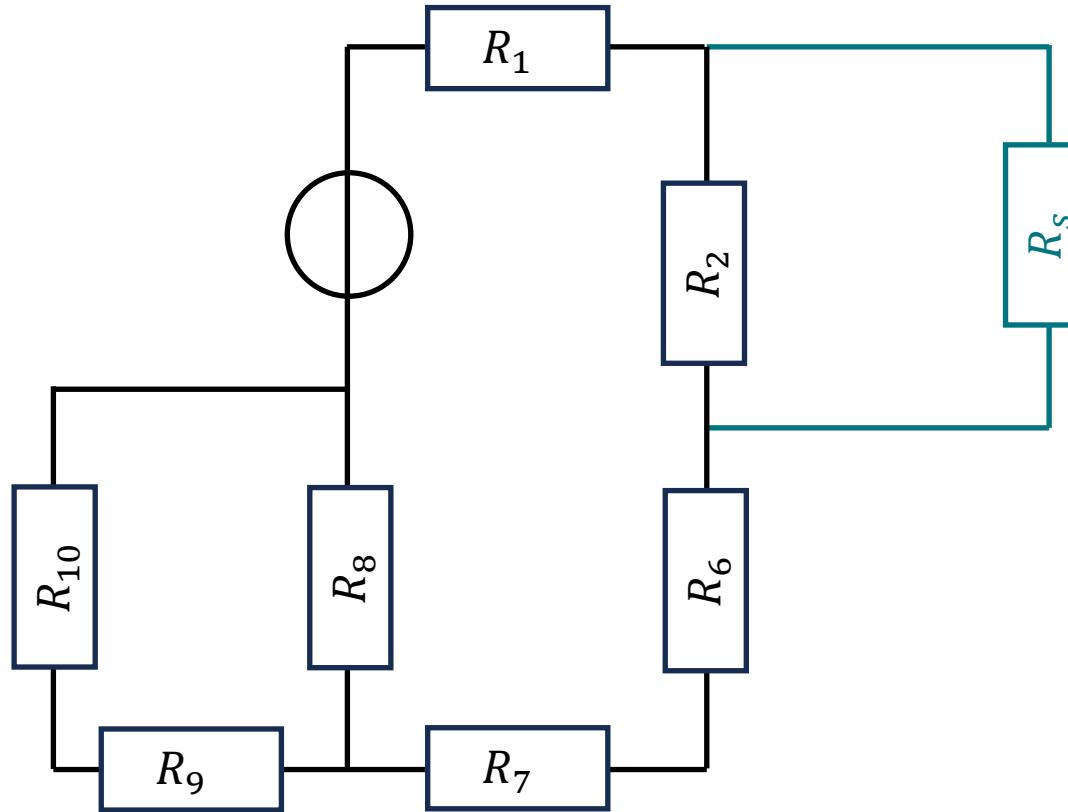


$$U_S = \sum_{k=1}^N U_k$$

Exemple: R_3 , R_4 et R_5 sont en série



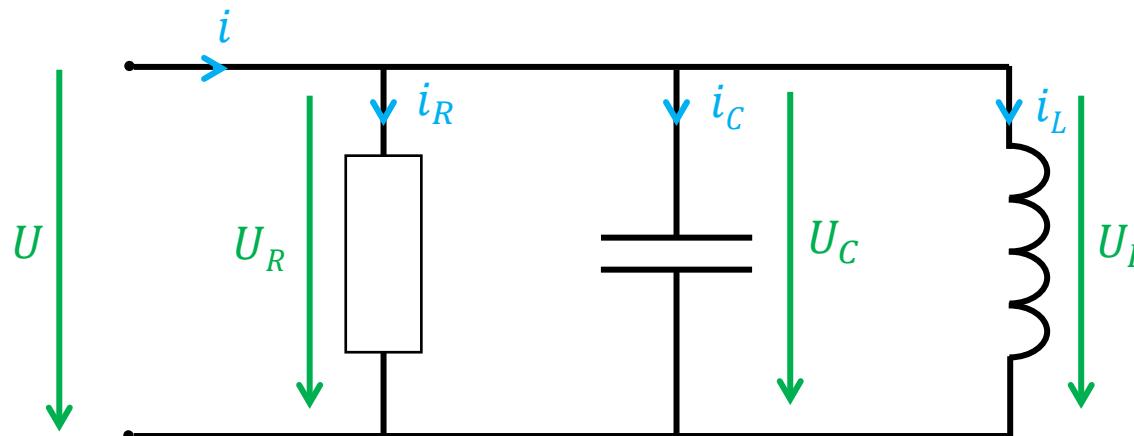
Quels autres éléments sont en série?



EPFL Eléments en parallèle: propriété fondamentale

Conformément aux lois de Kirchhoff, pour les éléments connectés en parallèle:

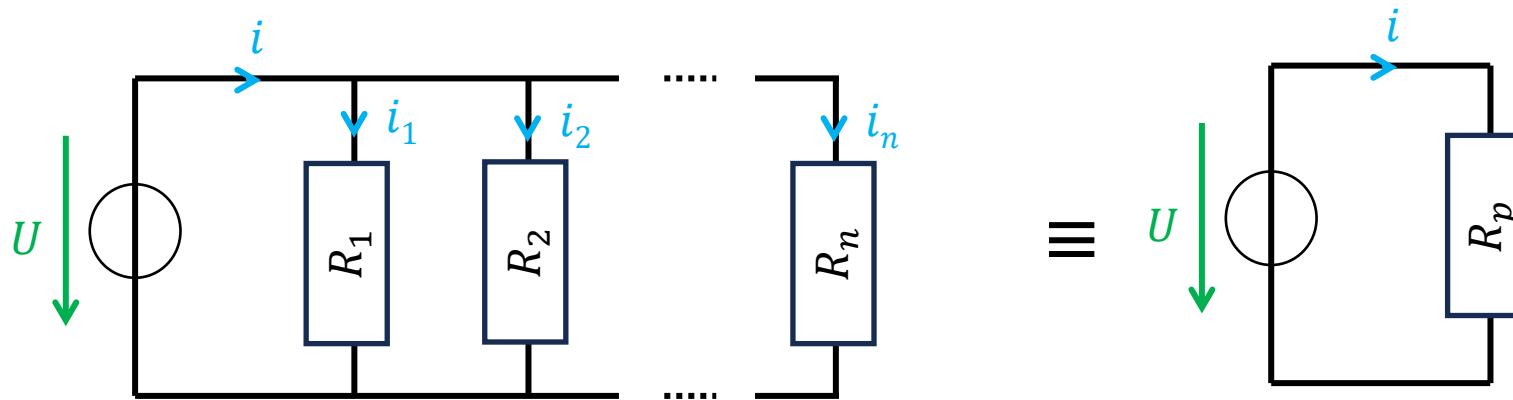
- La tension aux bornes de chaque élément mis en parallèle est identique (2^{eme} loi).
- Le courant total entrant le circuit parallèle est égal à la somme des courants individuels de chaque élément (1^{ere} loi).



$$U = U_R = U_C = U_L$$

$$i = i_R + i_C + i_L$$

Un circuit composé de plusieurs résistances connectées en parallèle peut se réduire à une unique résistance équivalente R_p



L'inverse de la résistance R_P équivaut à des résistances en parallèle
est la somme des inverses des résistances

Dans le cas général de N résistances en parallèle :

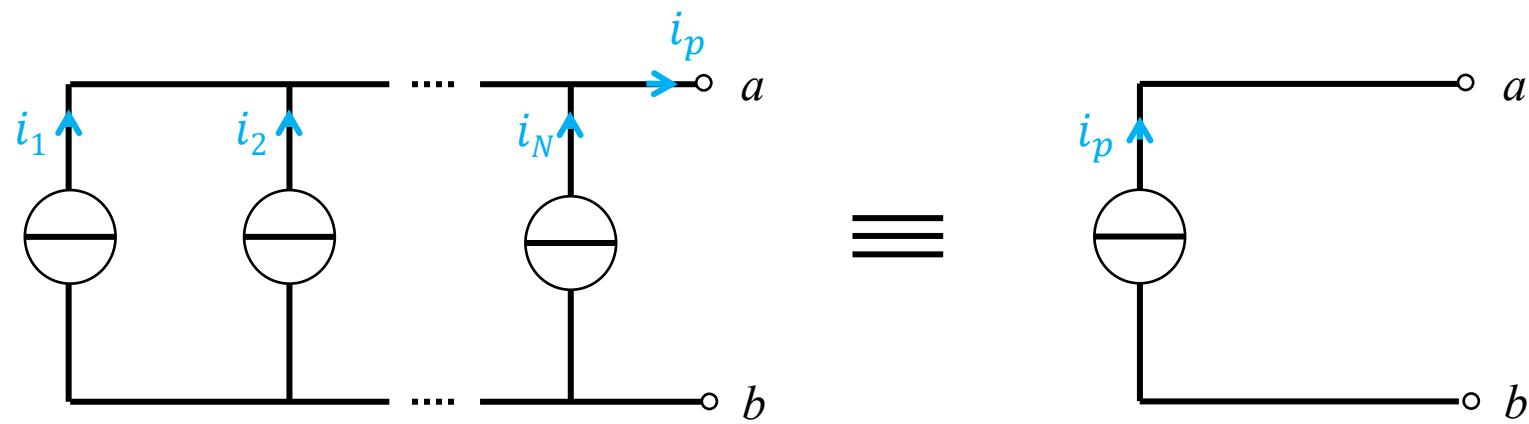
$$\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

Rappelons que la conductance G est donnée par $G = 1/R$

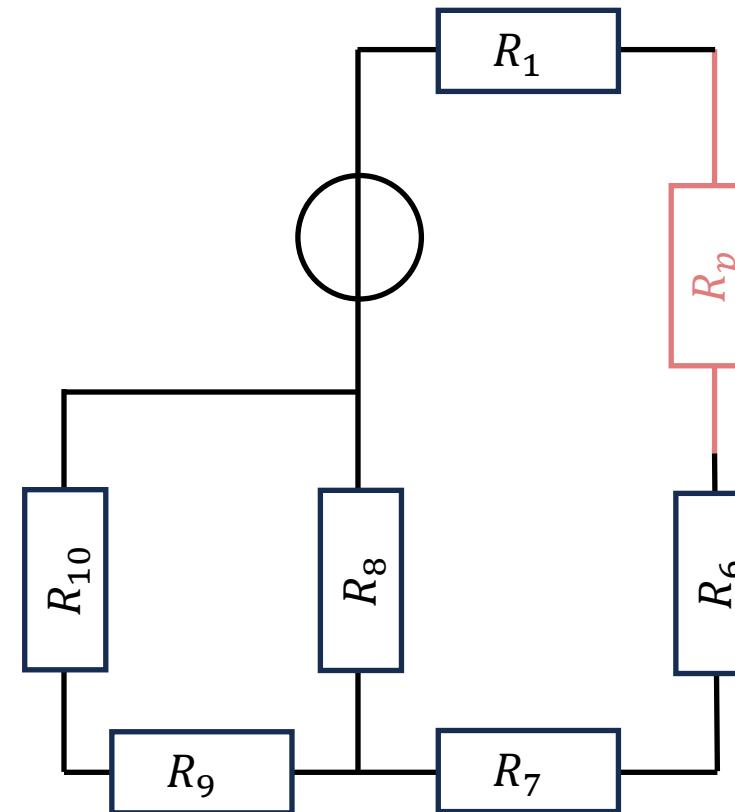
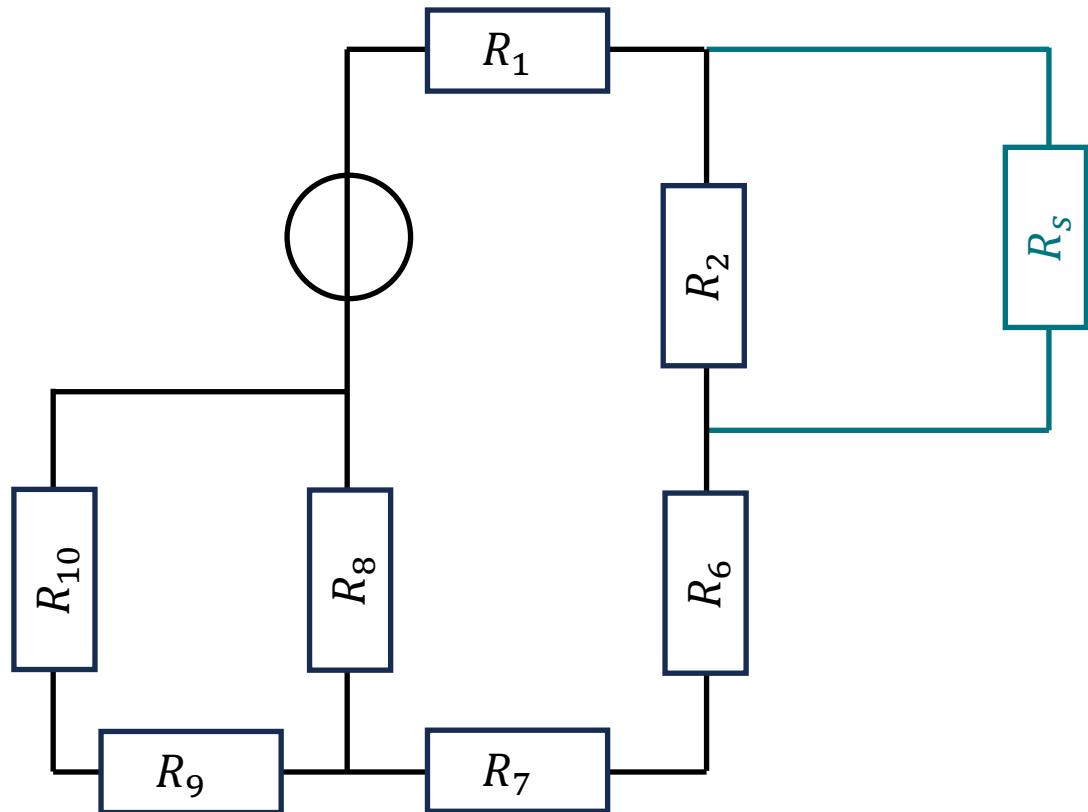
La conductance G_P équivalente à des résistances en parallèle est la somme des conductances

$$G_P = \sum_{k=1}^N G_k$$

Un circuit composé de plusieurs sources de courant idéales en parallèle est équivalent à une source de courant débitant la *somme algébrique* des courants individuels.

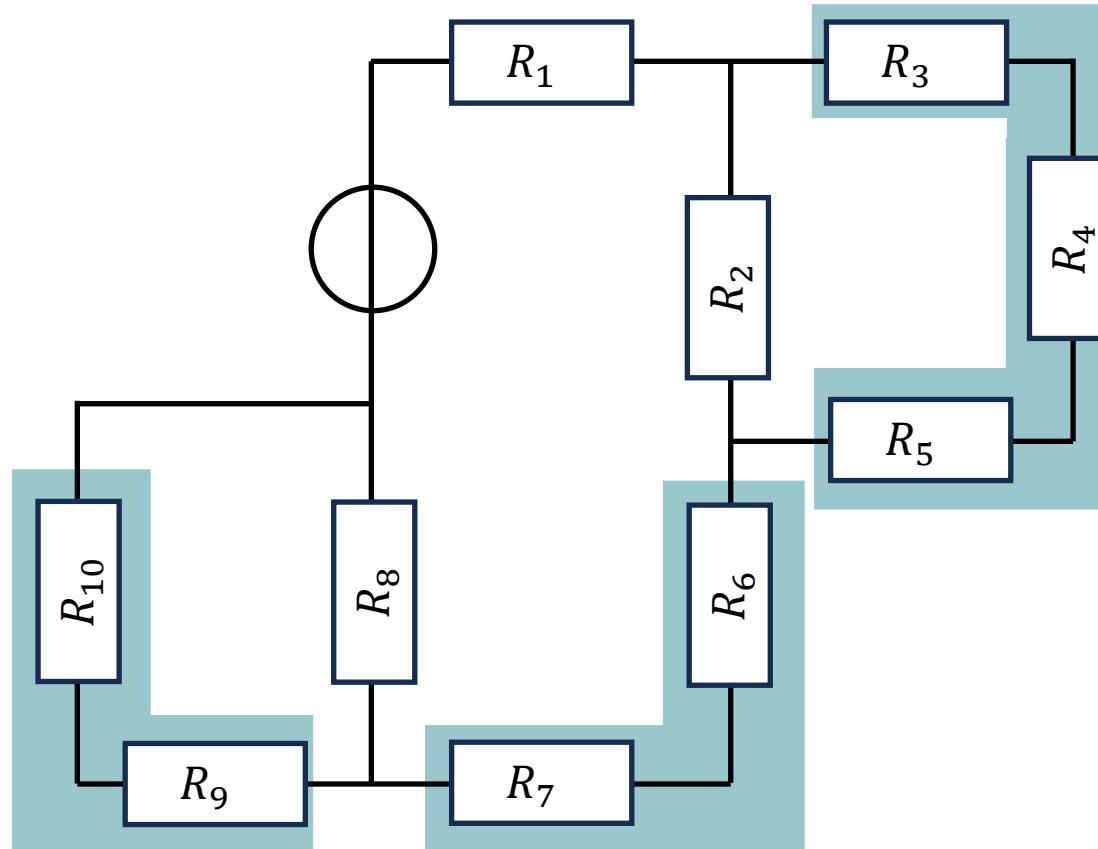


$$i_p = \sum_{k=1}^N i_k$$



En pratique, tout dipôle formé par des combinaisons série-parallèle de résistances (capacités) (inductances) peut se réduire à une résistance (capacitance) (inductance).

Le schéma équivalent peut être obtenu en procédant par réductions multiples des parties séries et des parties parallèles, conséutivement.



$$R_1 = 100 \Omega$$

$$R_2 = 200 \Omega$$

$$R_3 = 450 \Omega$$

$$R_4 = 2.5 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 950 \Omega$$

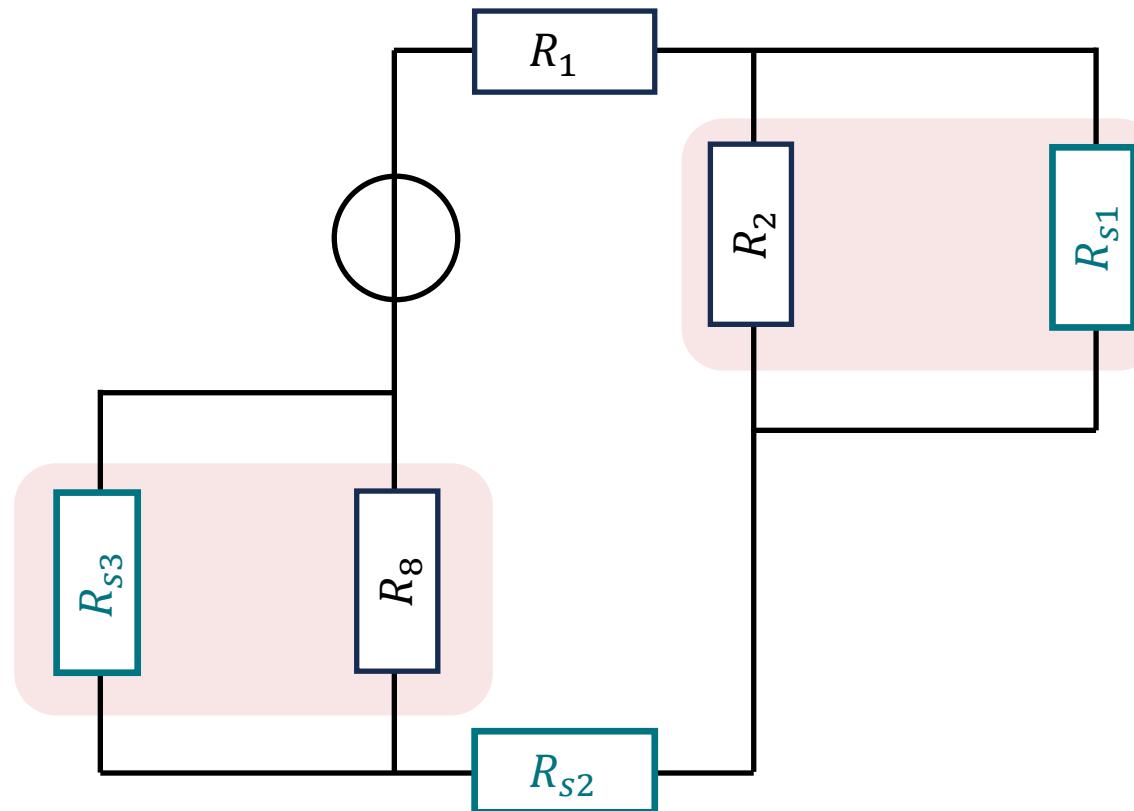
$$R_6 = 200 \Omega$$

$$R_7 = 450 \Omega$$

$$R_8 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_9 = 350 \Omega$$

$$R_{10} = 650 \Omega$$



$$R_1 = 100 \Omega$$

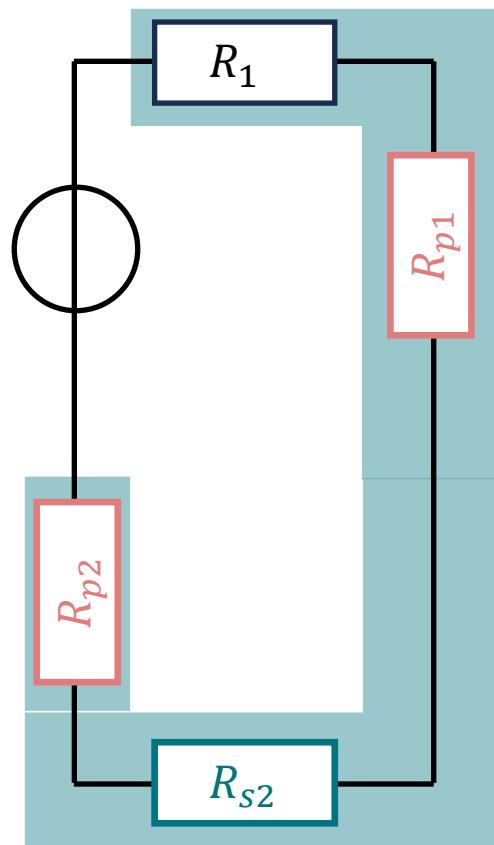
$$R_2 = 200 \Omega$$

$$R_{s1} = 3.9 \text{ k}\Omega$$

$$R_{s2} = 650 \Omega$$

$$R_8 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_{s3} = 1 \text{ k}\Omega$$

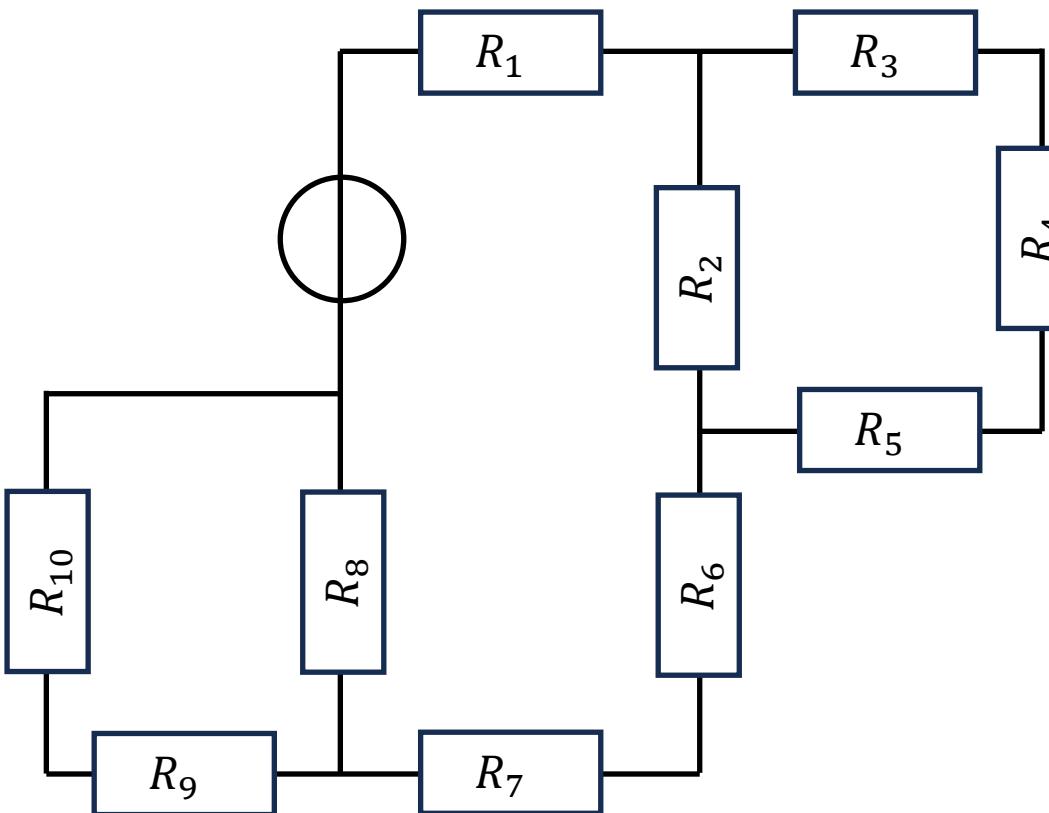


$$R_1 = 100 \Omega$$

$$R_{p1} = 190 \Omega$$

$$R_{s2} = 650 \Omega$$

$$R_{p2} = 500 \Omega$$



$$R_1 = 100 \Omega$$

$$R_2 = 200 \Omega$$

$$R_3 = 450 \Omega$$

$$R_4 = 2.5 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 950 \Omega$$

$$R_6 = 200 \Omega$$

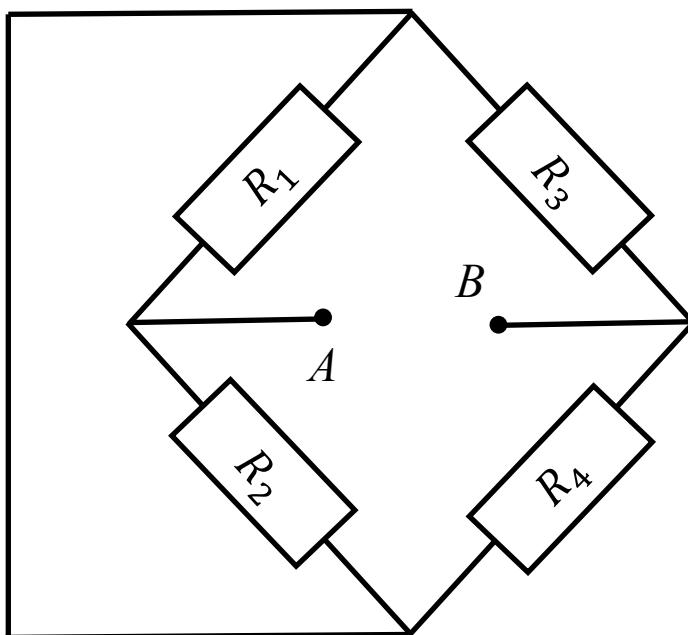
$$R_7 = 450 \Omega$$

$$R_8 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_9 = 350 \Omega$$

$$R_{10} = 650 \Omega$$

Réduisons le schéma suivant à une seule résistance R_{AB} et trouvons sa valeur



$$R_1 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 8 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

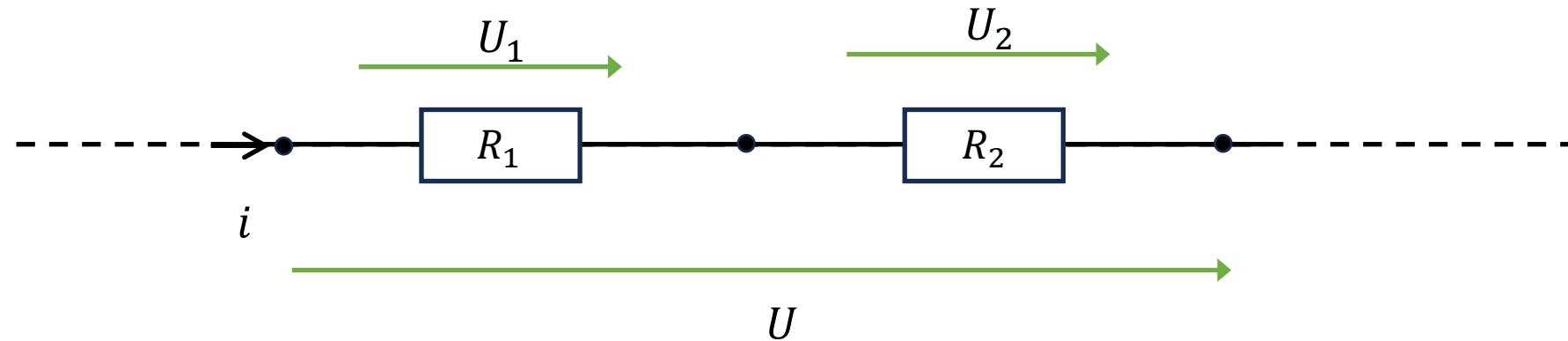
$$R_4 = 200 \Omega$$

Diviseur de tension et de courant

Reconnaitre des ‘diviseurs’ dans des circuits peut être très utile

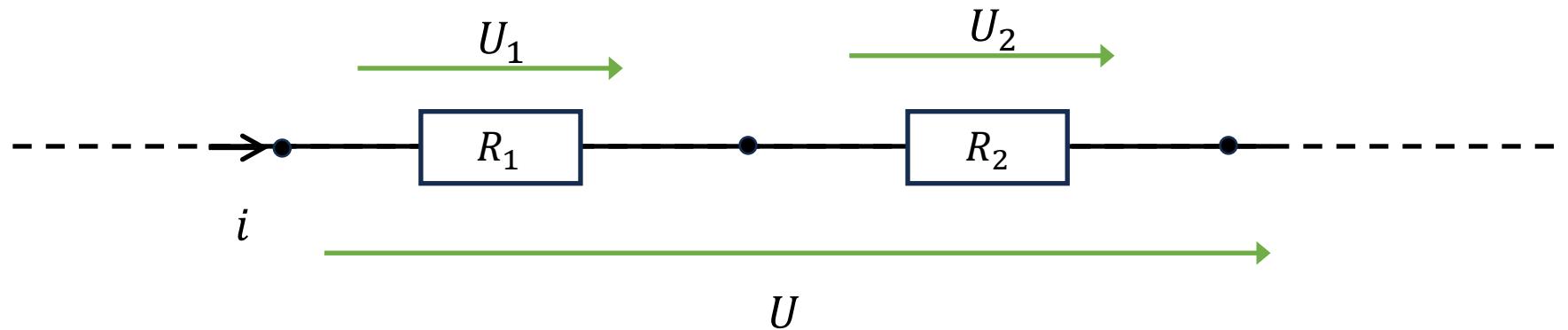
Objectif: établir des méthodes simplifiant et accélérant l’analyse des circuits

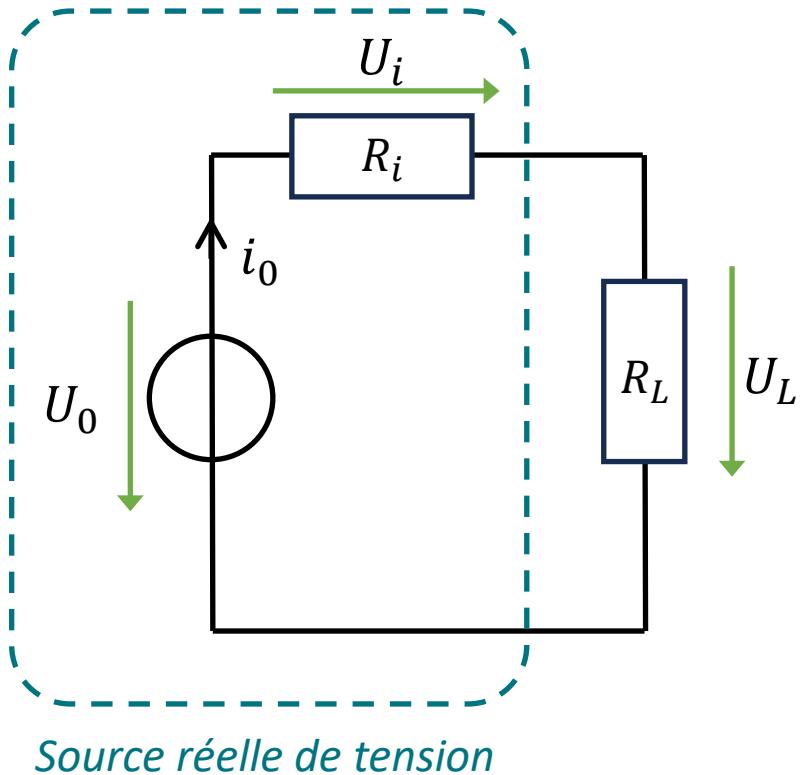
Diviseur de tension: montage électronique simple (agencement en série) qui permet d'extraire une tension plus faible que la tension totale



On fixe U , que valent U_1 et U_2 ?

On fixe U , que valent U_1 et U_2 ?





Méthode 1:

On applique les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm

$$U_0 = U_i + U_L$$

$$U_i = R_i i_0$$

$$U_L = R_L i_0$$

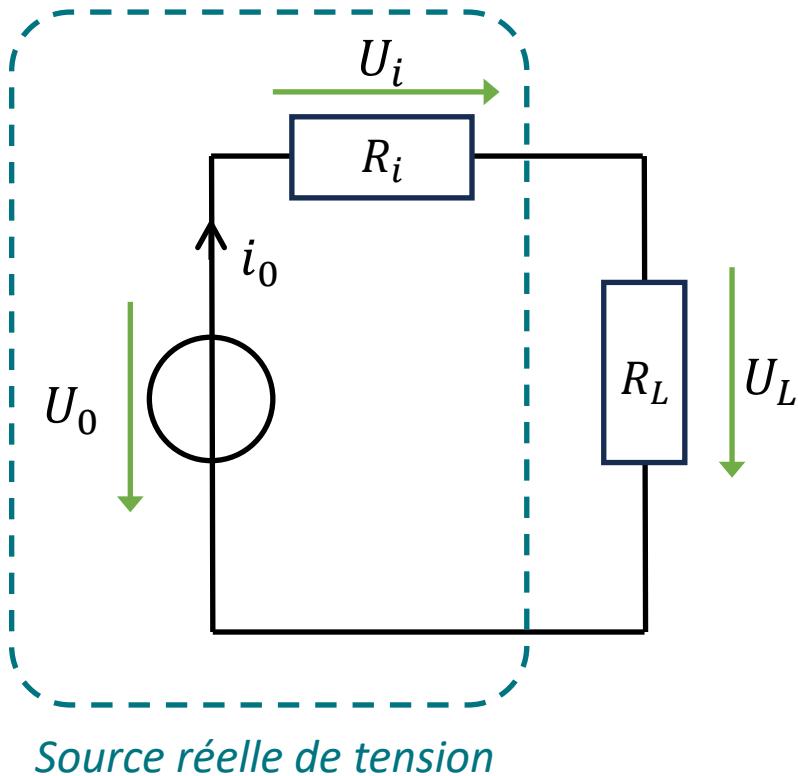
On en déduit:

$$U_0 = (R_i + R_L) i_0$$

Et finalement:

$$U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0$$

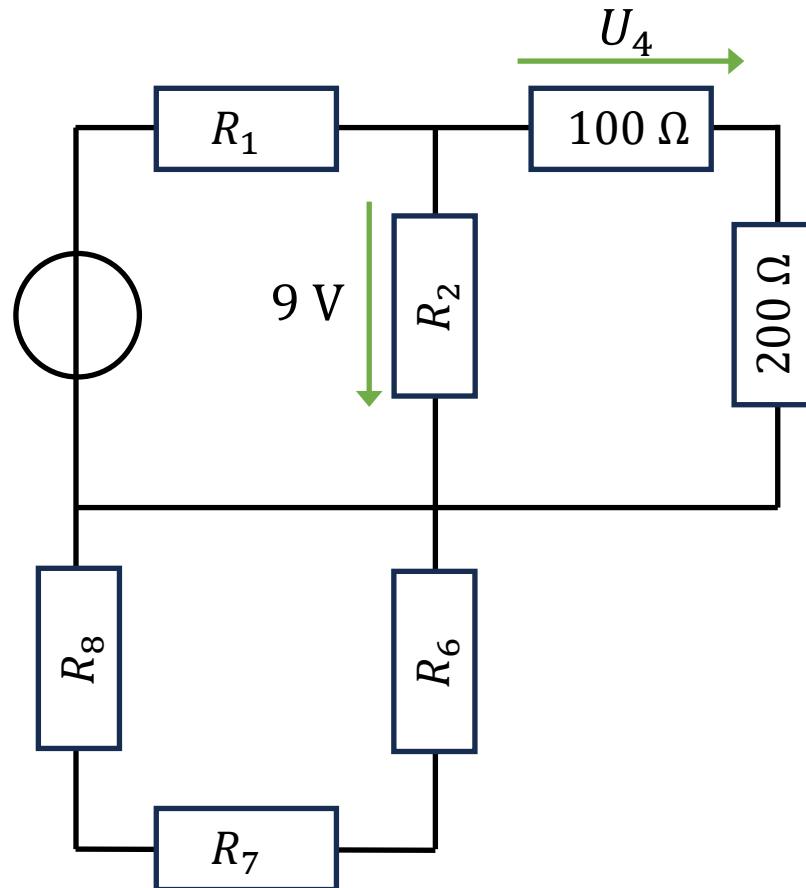
Cette méthode marche toujours ! Par contre cela peut être long et fastidieux

**Méthode 2:**

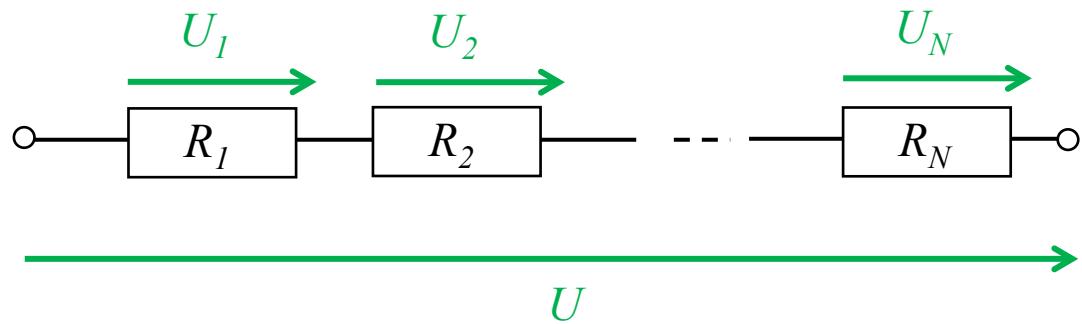
On applique le diviseur de tension (U_0 sur R_i et R_L)

$$U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0$$

Que vaut U_4 ?

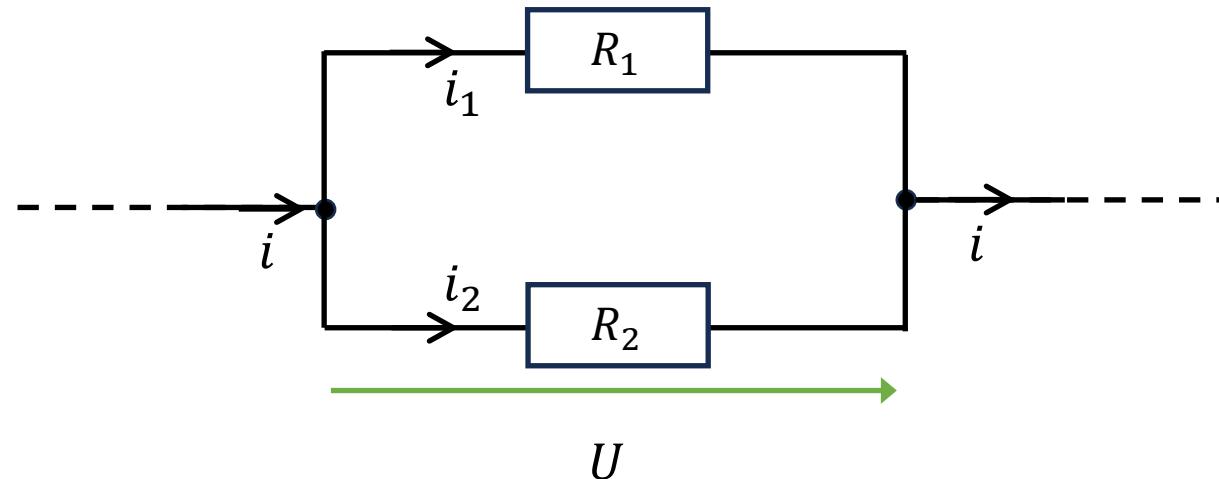


Si une *tension totale* U apparaît entre les bornes d'un agencement *en série* de résistances, alors la tension aux bornes de chaque résistance peut être directement exprimée en fonction de U .



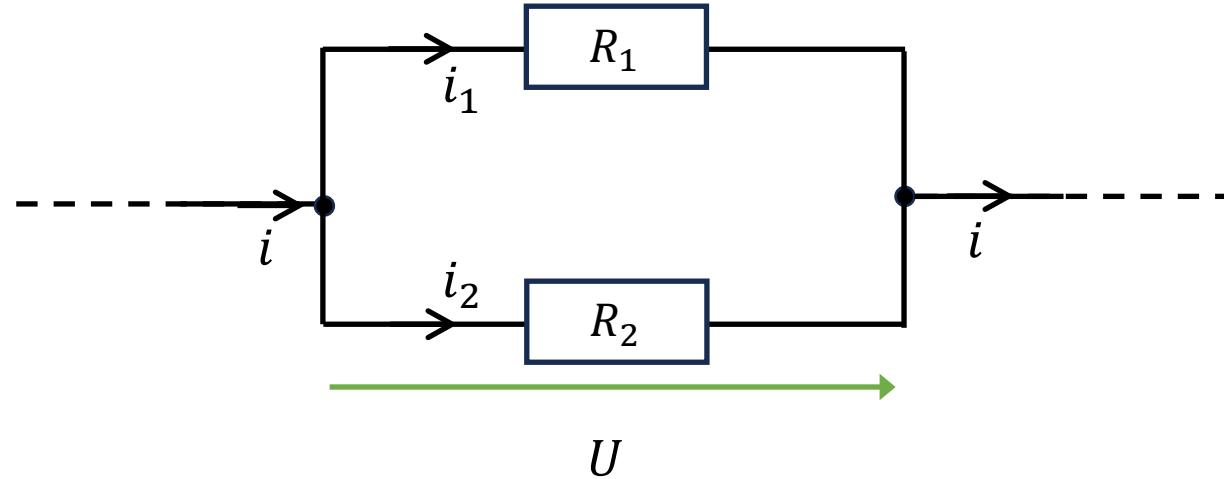
$$U_k = \frac{R_k}{R_S} U = \frac{R_k}{\sum_{j=1}^N R_j} U$$

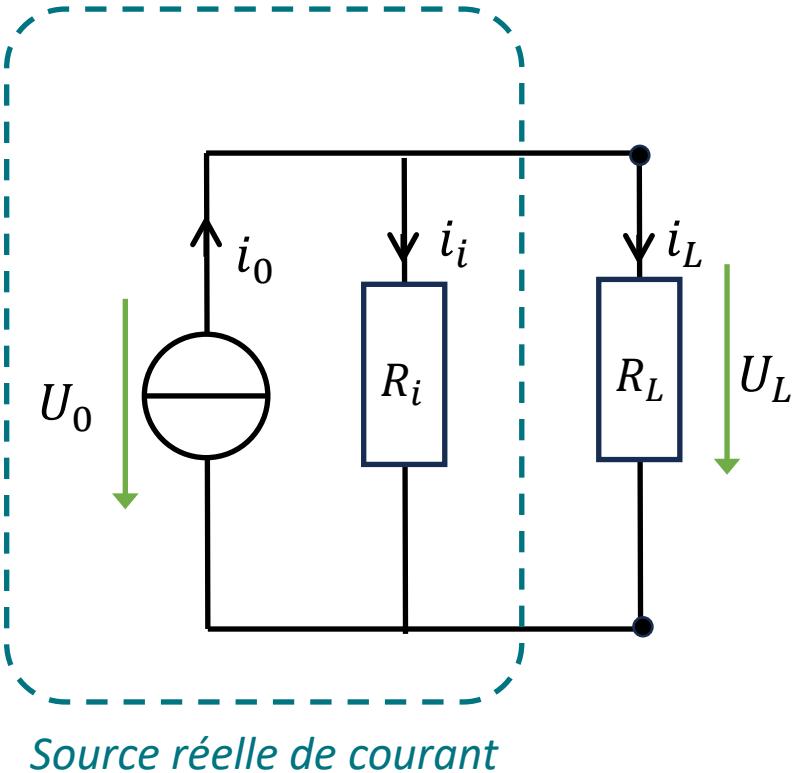
Diviseur de tension: montage électronique simple (agencement en parallèle) qui permet d'extraire un courant plus faible que le courant total



On fixe i , que valent i_1 et i_2 ?

On fixe i , que valent i_1 et i_2 ?



**Méthode 1:**

On applique les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm

$$i_0 = i_i + i_L$$

$$U_0 = R_i i_i$$

$$U_0 = R_L i_L$$

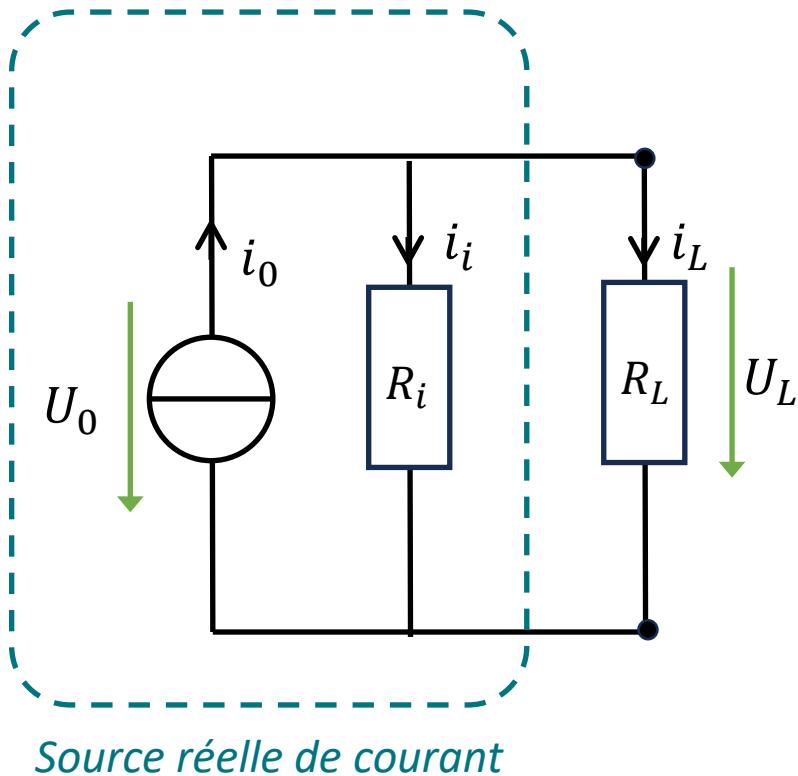
On en déduit:

Et finalement:

$$i_i = \frac{R_L}{R_i} i_L$$

$$i_L = \frac{R_i}{R_i + R_L} i_0$$

Cette méthode marche toujours ! Par contre cela peut être long et fastidieux

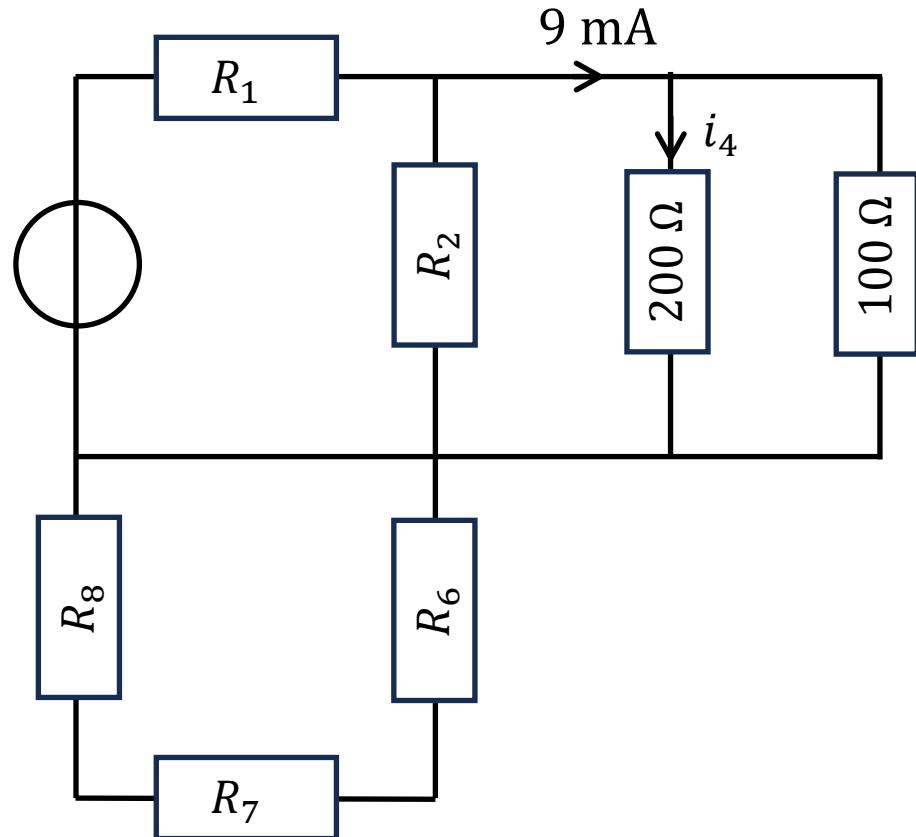


Méthode :

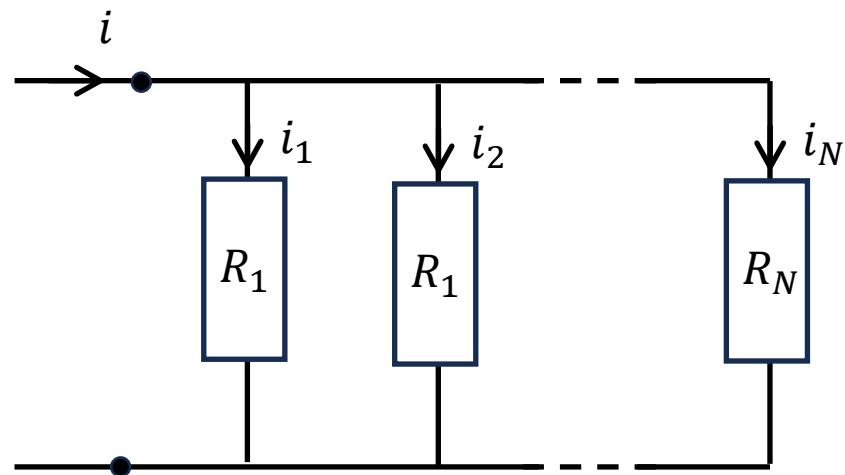
On applique le diviseur de courant:

$$i_L = \frac{R_i}{R_i + R_L} i_0$$

Que vaut i_4



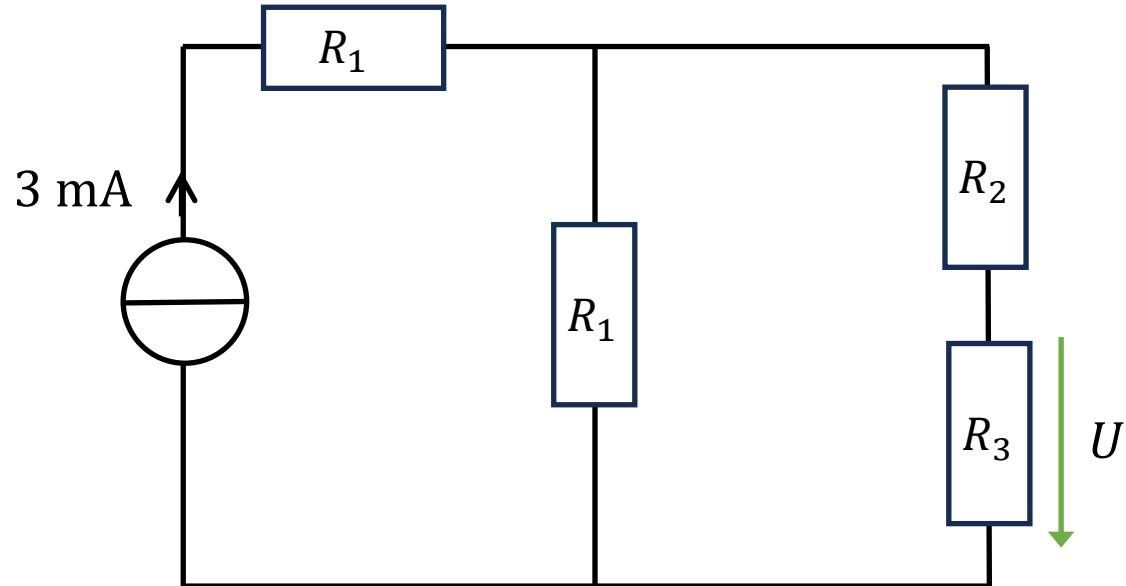
Si un courant *total* i est à l'entrée d'une combinaison *en parallèle* de résistances, alors le courant partiel dans une des branches peut être directement exprimé en fonction de i .



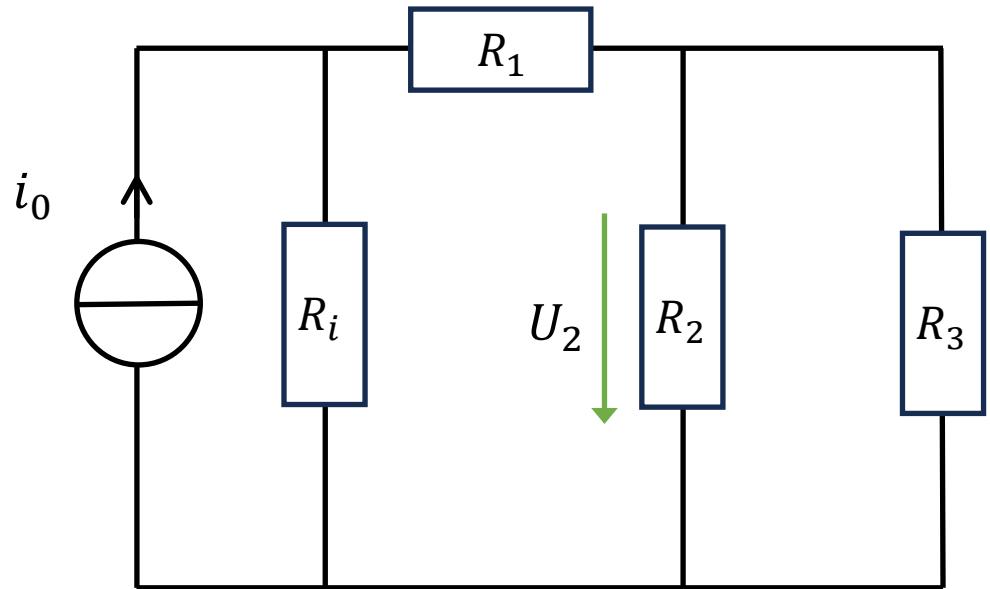
$$i_k = \frac{R_{eq}(-R_k)}{R_k + R_{eq}(-R_k)} i$$

- Pensez à la réduction à 2 résistances ...

Exprimez U en fonction des résistances et de la valeur de la source de courant.



Trouver U_2 et P_2



$$i_0 = 110 \mu\text{A}$$

$$R_i = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = 1.25 \text{ k}\Omega$$

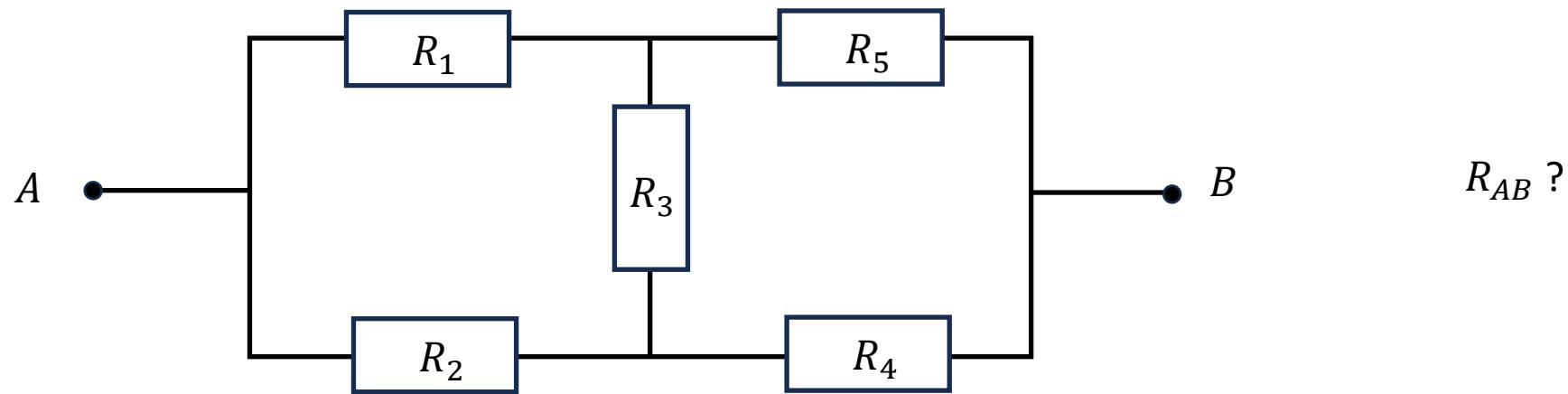
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 10 \text{ k}\Omega$$

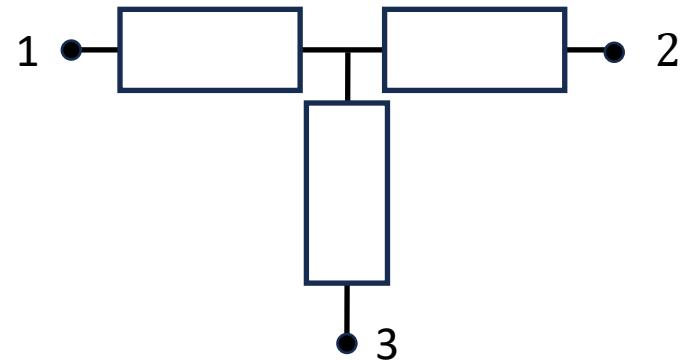
Agencement triangle - étoile

Pour calculer la résistance équivalente d'un ensemble de résistance:

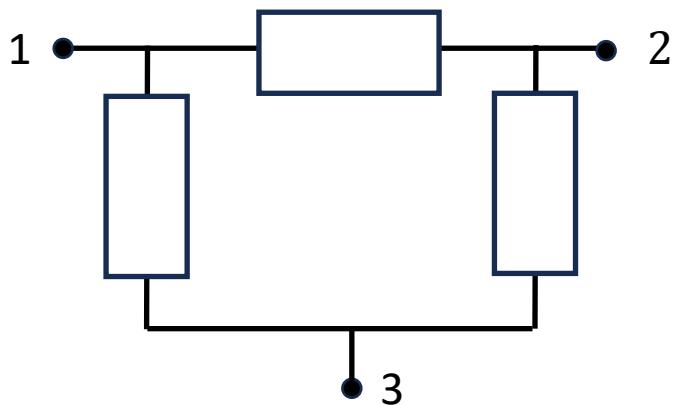
- Il suffit de réduire pas à pas les groupes de résistances en série et en parallèle.
- Cette procédure de réduction simple n'est pas toujours possible !



Un groupe de trois résistances peut former une étoile (on dit aussi T ou Y)



Trois éléments peuvent aussi former un circuit fermé. C'est l'arrangement dit en triangle (Δ ou Π)

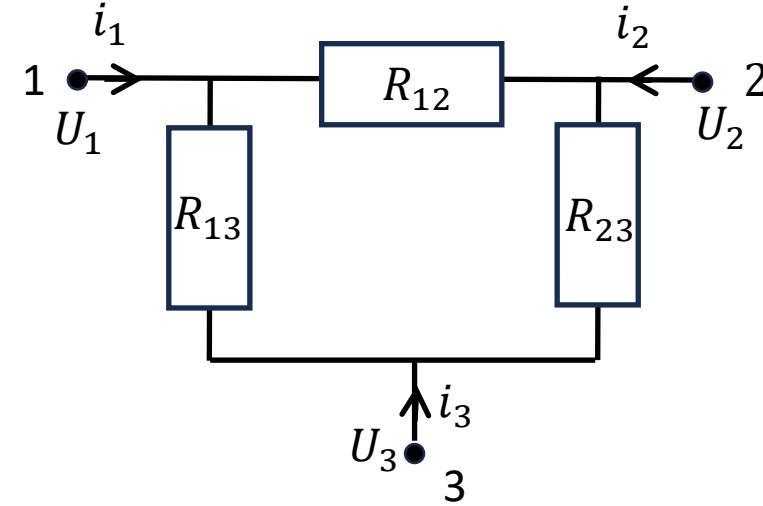
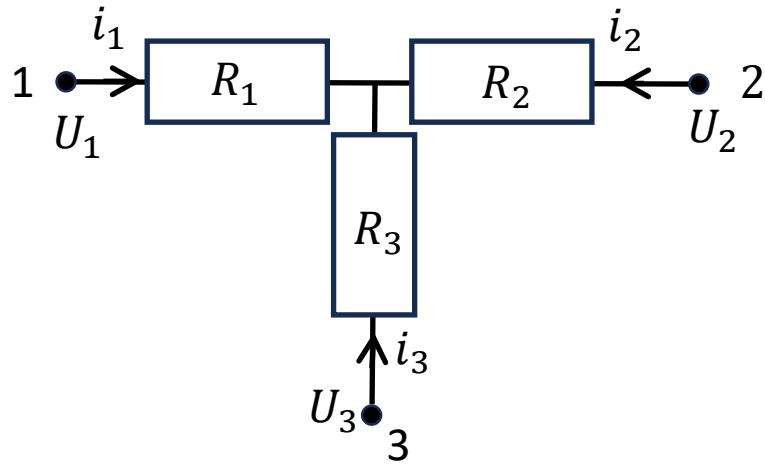


De telles configurations apparaissent souvent

- Peut être contourné en remplaçant circuit étoile par circuit équivalent triangle (ou vice versa)

EPFL Equivalence de tripôles en étoile-triangle à résistances

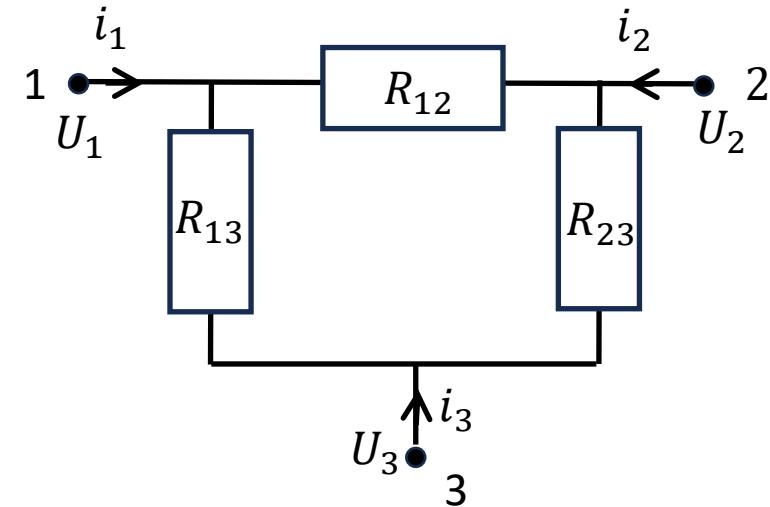
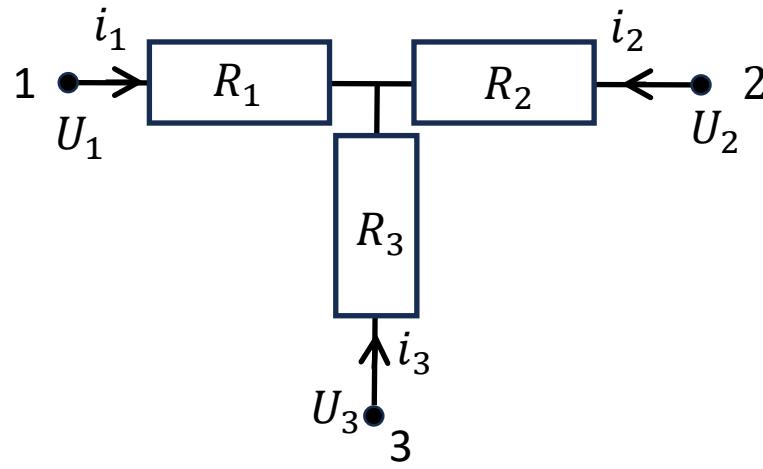
Soient les 2 tripôles ci-dessous:



Les deux tripôles sont équivalents s'ils ont en tout temps le même courant i et le même potentiel U pour chaque borne du même numéro.

- En partant de l'arrangement triangle et en connaissant les résistances R_{12} , R_{23} et R_{31} nous allons déterminer R_1 , R_2 et R_3 de l'arrangement en étoile correspondant.
- Nous nous baserons sur la résistance entre deux ports, considérant que la troisième n'est pas connectée ($i = 0 \text{ A}$).

EPFL Equivalence de tripôles en étoile-triangle à résistances



Supposons que $i_3 = 0 \text{ A}$

Les 2 circuits doivent se comporter en bipôles équivalents entre les bornes 1 et 2:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

EPFL Equivalence de tripôles en étoile-triangle à résistances

En faisant de même pour tout groupement de 2 ports:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

(1)

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

(2)

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

(3)

Nous pouvons ensuite extraire une expression pour R_1

$$(1) - (2): R_1 - R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} - R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (4)$$

$$(4) + (3): R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Les deux autres résistances sont obtenues par permutation cyclique.

Théorème de Kennelly: Une maille triangulaire appartenant à un réseau et ne comportant que des résistances R_{12} , R_{23} et R_{31} peut être remplacée par trois résistances R_1 , R_2 et R_3 disposées en étoile:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

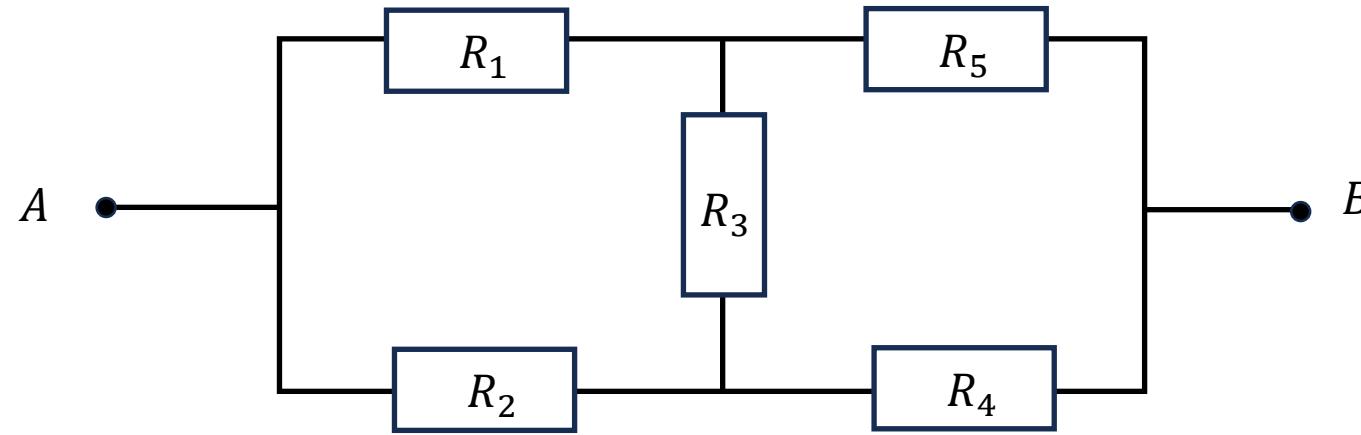
$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Mémorisation:

- La résistance ‘étoile’ aboutissant en un sommet, est égale au quotient du produit des 2 résistances ‘triangle’ également connectées à ce sommet, par la somme des trois résistances triangle.

A noter que le passage inverse de l’étoile au triangle est souvent sans intérêt en continu puisqu’il a tendance à compliquer le réseau.

- Il peut être nécessaire en alternatif triphasé (que nous ne verrons pas ce semestre)



Un schéma équivalent de complexité réduite peut être obtenu en groupant les éléments en série et/ou parallèle.

- La résistance équivalente à des résistances en série est toujours plus grande que la plus grande des résistances.
- La résistance équivalente à des résistances en parallèle est toujours plus petite que la plus petite des résistances.

Un agencement de résistances en série peut être utilisé pour obtenir des tensions partielles à partir d'une tension totale.

Un agencement de résistances en parallèle peut être utilisé pour obtenir des courants partiels à partir d'un courant total.

Le théorème de Kennelly permet de changer un agencement étoile en triangle (et vice versa)